实验二　单摆实验

【实验目的】

1、用单摆测定重力力加速度；

2、学习在直角坐标纸上正确作图及处理数据；

3、学习用最小二乘法作直线拟合；

4、分析测量中主要误差的来源及处理方法。

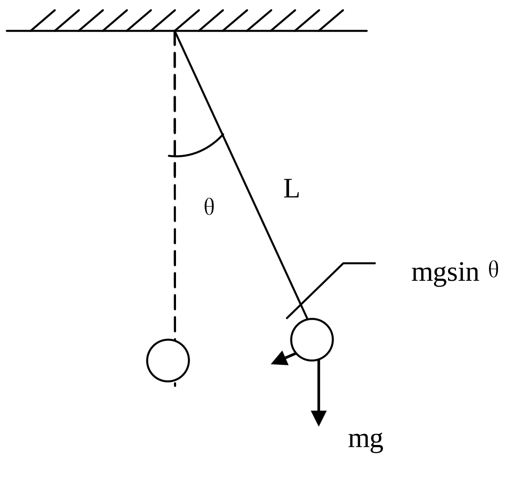
【实验仪器】

单摆装置，带卡口的米尺，游标卡尺，电子停表，光电计时器。

【实验原理】

1.　　周期与摆角的关系

把一个金属小球拴在一根细长的线上，如图（3-2-1）所示。如果细线的质量比小球的质量小很多，而球的直径又比细线的长度小很多，则此装置可看做是一根不计质量的细线系住一个质点，这就是单摆。略去空气的阻力和浮力以及线的伸长不计，在摆角很小时（$\theta < 5^{\circ}$），小球的运动方程是



图

$$ma_t = -mg\theta$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dl^2} = -mg\theta$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

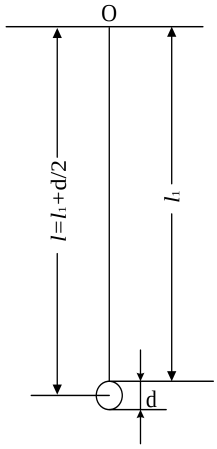
这是一个简谐运动方程，可知该简谐运动角频率$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T}$，其振动周期 T 为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

式中l是单摆的摆长，就是从悬点 O 到小球球心的距离，g 是重力加速度。因而，单摆周期 T 只与摆长l和重力加速度 g 有关。如果我们测量出单摆的l和 T，就可以计算出重力

加速度 g。实验时，测量一个周期的相对误差较大，一般是连续摆动 n 个周期的时间 t 因此

$$g = 4\pi^2 \frac{n^2}{t^2} l \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$



此外公式（1）是在单摆的摆角 $\theta \to 0$ 的条件下成立的，因此，在测量周期时必须保证摆角很小这个条件。摆角与周期之间的关系，经理论推导可得

$$T = T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{1\times3}{2\times4}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\theta}{2} + \cdots\right]$$

式中，T_0 为 θ 接近 0 时的周期。取到二级小量，有

$$T = T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

如果 $\theta \approx 5^\circ$，则 $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 5\times10^{-4}$。如果 $\theta = 10^\circ$ 则 $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 2\times10^{-3}$。上公式是一个接近实际情况的公式，由此有

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}) \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

如果按（3-2-3）式计算 g，就比（1）式少乘一个因子 $(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2})$，因而就会带来一定的系统误差，而这些系统误差大小是与 θ 有关的，且随 θ 的增大而增大。如当 $\theta \approx 10^\circ$，时，会给 g 带来约 0.4%的系统误差；$\theta \approx 5^\circ$ 时，约为 0.1%。如果要求测量的精度更高，则 θ 要更小，或者要做相应的修正。

2． 周期与摆长

当摆角 θ_m 很小时（小于 3），单摆的振动周期 T 和摆长 l 有如下近似关系：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ 或 } T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

如固定摆长 l，测出相应的振动周期 T，即可由（3-2-1）式求 g。也可逐次改变摆长 l，测量各相应的周期 T，再求出 T^2，最后在坐标纸上作 $T^2 - l$ 图。如图是一条直线，说明 T^2 与 l 成正比关系。在直线上选取二点 $P_1(l_1, T_1^2)$， $P_2(l_2, T_2^2)$，由二点式求得斜率

$$k=\frac{T_2^2-T_1^2}{l_2-l_1} \qquad (3\text{-}2\text{-}4)$$

再由式（(3-2-1）可得

$$k=\frac{4\pi^2}{g} \qquad (3\text{-}2\text{-}5)$$

由（3-2-4）式和（3-2-5）式求得重力加速度 g。

即

$$g=4\pi^2\frac{l_2-l_1}{T_2^2-T_1^2} \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

【实验内容及步骤】

用单摆测重力加速度的实验中，设摆长约 1m，用分度值为 1mm 的米尺测量，周期约 2s。用秒表测量，如果只测量一次，由于启/停秒表人的感官引起的反映不一致而造成周期的测量误差一般可达 0.3s，则重力加速度的相对不确定度为

$$\frac{U_g}{g}=\sqrt{(\frac{U_l}{l})^2+(\frac{2U_T}{T})^2}=\sqrt{(\frac{0.1}{100.00})^2+(\frac{2\times0.3}{2})^2}=30\%$$

如果改成连续测量 100 个周期，周期的不确定度为$\frac{0.3s}{100}=0.003s$，则重力加速度的相对不确定度为

$$\frac{U_g}{g}=\sqrt{(\frac{U_l}{l})^2+(\frac{2U_T}{T})^2}=0.32\%$$

所以，要选择连续测量 n 个周期而不是单次测量。

例：要求的用单摆测量某地的重力加速度 g 相对不确定度$\frac{u_g}{g}\le0.2\%$，如何选择仪器和测量方法？

按不确定度等分原则，$\frac{U_l}{l}=\frac{2U_T}{T}=\frac{0.002}{\sqrt{2}}=0.0014$，若已知 $l\approx100.00cm$。则 $U_l\le1.4mm$。使用最小分度值为 $1\,mm$ 的米尺去测量完全可以满足要求。又知 $T\approx2s$。所以 $U_T\le0.0014s$。这表示如果只测一个完整的周期，就必须用毫秒计去测量，才能满足要

求，但是周期是可以连续测量的，若连续测 n 个周期的时间为 t，则 $t = nT$，即 $\Delta t = n\Delta T$，如果取 $\Delta t = 0.1s$，。这时用最小分度为 0.1 的秒表（电子秒表、机械秒表）测 $n \geq \frac{0.1\times 2}{0.0014} = 71$ 时，$u_{c,t\leq}0.01s$，用秒表测量 $n \geq 70$ 次即可满足要求。

1、固定摆长，测定 g。

（1）测定摆长（摆长 l 取 100cm 左右）。

①先用带刀口的米尺测量悬点 O 到小球最低点 A 的距离 l_1（见图 3-2-2），重复多次测量

②先用游标卡尺多次测量小球沿摆长方向的直径 d（见图 3-2-2），：

① 摆长为

$$l = l_1 + \frac{\bar{d}}{2}$$

根据摆长计算公式，其不确定度传递关系为：

$$u_l = \sqrt{{u_{l_1}}^2 + (\frac{u_d}{2})^2}$$

摆线长用米尺测量，小球直径根据形状选择用游标卡尺或外径千分尺测量，若只考虑仪器引起的不确定度则有 $u_{l_1} = 1mm$，$\frac{u_d}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01mm$ 或 $\frac{u_d}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005mm$。根据：“微小误差舍去原则”略去 u_d 对不确定的贡献。

微小误差原则：

①当合成不确定度来自多个分量的贡献时，通常可以略去微小项的贡献，不会影响的计算结果。微小误差的判据是：该项不确定度分量在合成不确定度的 1/3 以下。

②在测量公式中，有时要引入修正项以提高测量准确度。在计算不确定度时，当修正项是一个相对小量时，它的不确定度的贡献通常可略去。

可见，摆长测量的精度主要取决于摆线的测量，因此仅用卡尺对作单次测量，而对却用米尺作精心的测量，不仅要多次测量，而且要在不同方位进行测量。

在进行物理实验时，要按照既定的实验目的和要求，首先确定实验方法，然后恰当选择仪器和测量条件，确定合理的实验测量次数。

（2）测量单摆周期。

使单摆作小角度摆动。通过计算可知，当小球的振幅小于摆长的 1/12 时，摆角 $\theta < 3^{\circ}$。

小球的振幅通过档杆在水平方向的位置而确定。从档杆方向平稳放开小球，开始自由摆动，待摆动稳定后，用光电计时器测量（如图 3-2-3）。

光电计时器的使用方法：开机通电后，默认的计时次数为 30 次，连接好光电门与计时器的插线，按“执行”键即准备计时，等小球经过光电门挡光时，即进行计时，由于光电计时器每档一次光就记录一次档光时刻的值，一个周期内共挡光两次，在第 61 次挡光时停止计时。其他次数时类推。如果要改变计时次数，按“复位”键后，再按“上调”、“下调”键可改变计时次数。再按“执行”键即可计时。

测量摆动 50 次（设置计时次数为 50 次）所需的时间 50T（积累法），并重复测量多次，记录数据：

2、改变摆长，测定 g

使 l 分别为 50，60，70，80，90cm 左右，测出不同摆长下的 50T。

（1）用直角坐标纸作 $l-(50T)^2$ 图，如果是直线说明什么？ 由直线得斜率求 g

（2）以 l 及相应的 $(50T)^2$ 数据，用最小二乘法作直线拟合，求其斜率，并由此求出 g。

3、固定摆长，改变摆角 θ，测定周期 T。

使 θ 分别为 5°，10°，15°，20°，25° 30°，用光电计时器测摆动周期 T，然后做比较，如表 1 所列。

[1] 用周期 T 随摆角 θ 变化的二级近似式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (3\text{-}2\text{-}7)$$

计算出上述相应角度的周期数值，并进行比较（其中 g 取当地标准值）。

[2] 用式（3-2-1）计算出周期 T 的值，并进行比较（西安重力加速度 $g=9.79136m/s^2$）。

从以上比较中体会式（3-2-1）要求摆角 θ 很小这一条件的重要性，并体会摆角 θ 略偏大时用式（3-2-3）进行修正的必要性。

表 3-2-1 固定摆长，用光电计时器测摆动周期 T

摆角 次数	5°	10	15°	20	25°	30°
实验值$\overline{T}/s$						
由式（4）计算 T/s						
$\frac{T_{实}-T_{计}}{T_{计}}$ /（%）						
由式（1）计算 T/s						
$\frac{T_{实}-T_{计}}{T_{计}}$ /（%）						

【数据记录与处理】

1．自行设计表格，记录数据。

2．利用公式，正确表达测量结果，计算相对不确定度、百分百误差。

3．对实验内容 2 用作图法和最小二乘法处理数据。

4．分析实验结果。

【注 意 事 项】

（1）如用停表测量周期时，应选择小球通过最低位置处计时，并在某一个固定位置时启动和停止计时。或者采用差值计算以减小人的反应误差，如计 40 次和 10 次的差值。

（2）要注意小摆角的实验条件，例如控制摆角$\theta < 3°$。

（3）要注意使小球始终在同一个竖立平面内摆动，防止形成“锥摆”。

（4）本仪器提供铁质小球的直径： 20mm。

（5）挡光针为长 15mm，直径为 2.7mm 的中空塑料圆柱，实验时将其插在小球的底部孔中。

【思考题】

1、请想出一种用摆锤为不规则形状的重物（如一把挂锁）制成“单摆”，并测定重力加速度 g 的方法。

2、假设单摆的摆动不在竖立平面内，而是作圆锥形运用（即“锥摆”）。若不加修正，在同样的摆角条件下，所测的 g 值将会偏大还是偏小？为什么？

3、测量单摆的周期，摆角不为零，而又不加以修正，要求的测量相对不确定度小于千分之三（相对于本地区的标准值而言），问摆角应小于多少度？

4、设计实验

其他系统误差的考虑

除了摆角的影响以外，由于存在理论、方法等方面的误差，还需从以下这些方面逐项分析，考察并修正测量结果。

（1）复摆的修正

单摆公式（1）中，我们假定小球是一个质点，而且不计摆线质量，实际上，从精确测量的角度分析，摆线质量μ并不等于零，小球半径 r 也不等于零，即不是理性的单摆，而是一个绕固定轴摆动的复摆。其周期可用下式表达：

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}-\frac{1}{6}\frac{\mu}{m})}$$

m 为小球质量，μ为摆线质量，l为摆线长度，r 为小球半径。 第二、三项为修正项，数量级为 10^{-4}左右。

（2）空气浮力与阻力的修正

考虑到空气的浮力和阻力影响，周期将增大。即

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{(1+\frac{8}{5}\frac{\rho_0}{\rho})}$$

ρ_0、ρ为空气和小球的密度，数量级为 10^{-4}左右。第二、三项为修正项，数量级为 10^{-4}左右。